

# 一种高性能并行多层快速多极子算法

潘小敏, 盛新庆

(北京理工大学信息与电子学院电磁仿真中心, 北京 100081)

**摘要:** 针对主流并行计算机架构以及电特大目标的特点, 提出并实现一种高性能并行多层快速多极子算法. 采用由粗到细、多层次渐进展开的表述形式, 并配以算例, 具体分析算法每个环节的数值性能, 充分研究、展示算法的效率和精度. 使用本文算法, 成功计算了未知数超过 3 亿 1 千万, 电尺寸达到 2000 个波长的电特大目标的电磁散射.

**关键词:** 多层快速多极子算法; 并行; 散射

**中图分类号:** O441 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2010) 03-0580-05

## A High-Performance Parallel MLFMA

PAN Xiao-min, SHENG Xin-qing

(Center for Electromagnetic Simulation, School of Information and Electronics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** Based on the architecture of a popular parallel platform and properties of extremely large targets, a high-performance parallel multilevel fast multipole algorithm (MLFMA) is proposed and implemented. A detailed description of the proposed parallel MLFMA is presented by a style of multilevel development from a coarser to finer consideration. Along with numerical experiments to analyze numerical performance of each part of the algorithm, the efficiency, accuracy and capability of the parallel MLFMA are well demonstrated. This high-performance parallel MLFMA has successfully computed scatterings by targets with over 310 millions unknowns and more than 2000 wavelengths in sizes.

**Key words:** multilevel fast multipole algorithm (MLFMA); parallel; scattering

### 1 引言

电特大目标散射是近年来从目标特性、隐身设计等实际工程中, 提炼出的一个颇具挑战性的科学问题. 对于这类问题, 以往通常采用高频近似方法求解<sup>[1~3]</sup>. 然而高频方法的计算精度一般难有保证, 只适用于目标散射特性的粗略估计, 要获得电特大目标散射的精确可靠分析则往往需要全波数值方法. 利用全波数值方法计算电特大目标散射在上个世纪是不可能的, 因为所需计算资源过大. 但今天则是可能的. 这缘于两个基本事实: 一、计算电磁快速算法研究的突破; 二、计算机技术的飞跃发展, 尤其是并行技术的发展. 本文目的就是针对主流并行计算机架构以及电特大目标的特点, 提出并实现一种高性能并行多层快速多极子算法 (MLFMA), 完成尺寸过千个波长, 未知数过亿的特大目标的计算.

多层快速多极子算法的提出及实现是上世纪末计算电磁领域研究的一大突破, 极大地提高了电磁计算的能力, 大致将几个波长的计算能力提高到几十个波

长<sup>[4~6]</sup>. 之后, 多层快速多极子算法又与计算机并行技术相结合, 将计算能力再次提升到几百个电波长<sup>[7~13]</sup>. 本文则在此基础上, 针对目前主流并行计算机架构一分布式内存并行系统, 提出并实现一种高性能并行多层快速多极子算法, 成功计算了未知数超过 3 亿 1 千万, 电尺寸过 2 千个波长的电特大目标的散射. 为清晰完整表述算法, 本文采用由粗到细、多层次渐进展开的表述形式, 并配以算例, 具体分析算法每个环节的数值性能, 充分研究、展示算法的效率和精度.

### 2 高性能并行多层快速多极子算法

如图 1 所示, 并行多层快速多极子算法可分为四层. 除特别说明, 本文所有数值实验都是在北京理工大学的电磁仿真中心“刘徽”高性能计算平台上进行. “刘徽”是以 Myrinet 千兆光纤网连接的 32 节点 IBM 服务器集群, 每个节点配有 4G 内存、3.0GHz Intel 至强服务器 CPU, 软件平台为 64 位 LINUX 操作系统、MPICH 并行库. 文中采用的算例是需要 16, 303, 920 个未知数来模

拟、舰身为 536 个波长舰船模型—SHIP-536, 如图 2 所示. 计算中多层快速多极子将计算区域分为 12 层.

## 2.1 高性能并行多层快速多极子算法的第一层设计

计算目标散射的多层快速多极子一般包含四个模块. 这是矩量法的最初级层次、最一般的考虑, 不涉及多层快速多极子的实现和并行算法的设计. 对于 SHIP-536, 这四个模块消耗的内存分别为 2.5GB、34.6GB、4.9GB 和 0GB, 消耗的时间则为 66s、1866s、3645s 和 21s.

## 2.2 高性能并行多层快速多极子算法的第二层设计

### (1) 读取几何信息

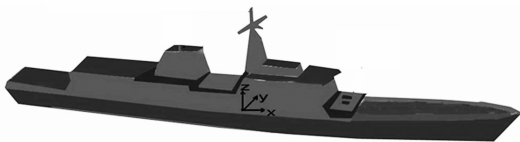


图2 舰船模型

多层快速多极子所需几何输入信息与普通矩量法类似. 串行算法一般直接读入保存上述几何信息、建立几何信息树. 当未知数上亿、目标电尺寸上千个波长时, 几何信息所占内存极大. 因此, 首先需并行地读取保存这些信息以节省内存<sup>[10]</sup>; 二是必须以二进制的方式存取几何信息以提高读写效率. 莫顿码 (Morton Key) 方便了几何信息树的建立<sup>[6]</sup>. 但 32 位的莫顿码只能描述 10 层几何信息树, 对应目标尺寸为 100 个电波长左右. 要高效地计算尺寸达到上千个波长目标的散射, 应采用 64 位莫顿码. 对于 SHIP-536, 采用 32 位莫顿码时, 完成整个计算所需内存为 82.7GB、时间为 8521s; 而采用 64 位的码时, 内存减少为 42.0GB、时间减少为 5598s.

### (2) 建立矩阵方程

多层快速多极子将矩量法中的系数矩阵分为近相互作用矩阵和远相互作用矩阵. 近相互作用矩阵的建立如同普通矩量法, 只不过这里采用压缩方式存储它以充分利用其稀疏性. 远相互作用矩阵则分为发射/接收模式矩阵、插值矩阵、中心平移矩阵和转移矩阵. 把计算能力从几百个波长提升到上千个波长涉及建立这些矩阵的很多技巧, 这将在后面讨论. SHIP-536 算例显示, 建立近/远相互作用矩阵所需内存分别为 13.5GB 和 21.1GB, 而时间则为 1761s 和 105s.

### (3) 求解矩阵方程

多层快速多极子一般采用迭代法来求解矩阵方程. 常用的 CG、BiCG、BiCGStab 和 GMRES 迭代器中, 并

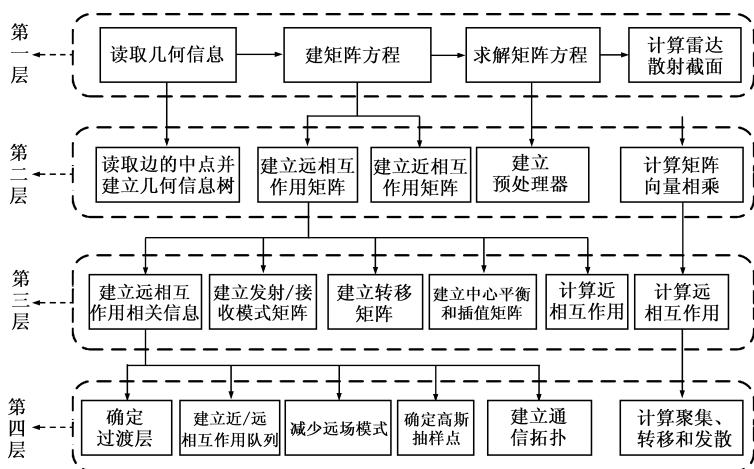


图1 并行多层快速多极子算法设计的多层次渐进展开方式

行的 GMRES 非常适合并行多层快速多极子. GMRES 涉及多层快速多极子的核心—矩阵向量相乘, 我们将在第三层设计中讨论其具体实现. 为加速迭代, 本文采用了块对角预处理器. 对于 SHIP-536, 建立预处理器和求解矩阵方程消耗内存分别为 1.4GB 和 3.5GB, 时间分别为 11s 和 3634s.

### (4) 计算雷达散射截面

应用多层快速多极子中聚集过程来计算双站雷达散射截面比直接计算要高效得多<sup>[10]</sup>, 但需要额外内存保存从第 2 层到第 0 层的插值矩阵和中心平移矩阵. 对于 SHIP-536, 直接法计算雷达散射截面所需时间为 1251s, 采用多极子方式计算则只需 21s, 但额外需要内存 2.8GB. 要将计算能力提升至上千个波长, 必须妥善处理这部分内存. 观察发现, GMRES 投影向量消耗的内存大于计算雷达散射截面额外所需内存; 而且它们分布存储于各处理器, 与计算雷达散射截面额外所需内存的使用方式完全匹配. 于是循环使用 GMRES 投影内存空间, 便可成功解决上述内存需求问题.

## 2.3 高性能并行多层快速多极子算法的第三层设计

### (1) 远相互作用的并行方式

在建立远相互作用矩阵前, 必须确定并行方式. 平均分配各层盒子到各处理器是自然选择, 但处理器多时很难保证负载均衡<sup>[10]</sup>. 为此我们选择一个过渡层<sup>[9]</sup>: 在盒子大于过渡层盒子的层, 平均分配远场模式到各处理器; 在盒子小于过渡层盒子的层, 则将盒子分配到各处理器. 如何选择过渡层将在第四层设计中讨论.

### (2) 建立远相互作用矩阵

目标尺寸达到上千个波长时, 充分利用远相互作用矩阵系数的对称性尤为重要<sup>[11]</sup>. 对于发射/接收模式矩阵, 电场 (或磁场) 积分方程时使用对称性可将内存消耗减为原来的 1/4, 联合积分方程时则可减为 1/2. 插

值矩阵和反插值矩阵互为转置, 串行代码只需保存它们中的一个, 即插值矩阵. 目标尺寸很大时, 与盒子较大层相关的插值矩阵消耗很多内存, 例如对于 SHIP-536, 这部分插值系数消耗内存 2.0GB, 显然应将插值矩阵分布存储, 但此时反插值矩阵就不全位于本地, 为避免通信, 需要将反插值矩阵也分布存储. 转移矩阵所占内存很大, 每个处理器保存它的备份将导致内存瓶颈. 它的计算也很耗时, 实时计算它会严重降低算法效率. 对于 SHIP-536, 即便使用快速算法<sup>[11]</sup>, 每次矩阵向量相乘中计算转移矩阵所需时间为 59s. 这让尺寸上千个波长目标的计算几乎不可能在合理时间内完成. 为此, 本文采用文献[9]提出的高效替代方案来处理转移矩阵.

### (3) 计算矩阵向量相乘

矩阵向量相乘的近/远相互作用在多层快速多极子中各自独立进行. 近相互作用的并行比较直接; 远相互作用的并行计算则比较复杂, 将在第四层设计中讨论. 为达到各自负载均衡, 近/远相互作用的计算任务分别按它们的工作量来分配. SHIP-536 的数值实验中, 每次矩阵向量相乘中近/远相互作用的时间分别为 0.4s 和 33.7s.

## 2.4 高性能并行多层快速多极子算法的第四层设计

### (1) 确定过渡层

将并行多层快速多极子的计算能力由几百个波长提升至上千个波长, 确定算法中的过渡层非常关键. 按盒子并行易导致盒子较大层的负载不均衡, 而按远场模式并行则会带来插值操作的通信, 所以过渡层的选择实际是权衡两种并行方式在不同层间实现时的代价和收益<sup>[9]</sup>.

### (2) 建立近/远相互作用队列

近/远相互作用队列是实现近/远相互作用的必备条件. 并行算法中, 它们还是分配计算任务的依据. 并行算法根据这两个队列估算出所有盒子的工作量, 将盒子或远场模式平均分配到各处理器. 对于电特大目标, 建立这两个队列非常消耗计算资源, 为此我们采用文献[13]中的优化方案来提高效率.

### (3) 减少远场模式

多层快速多极子中, 计算时间和内存需求强烈依赖于由盒子大小决定的远场模式数<sup>[6]</sup>. 对于电尺寸上千个波长的目标, 找到盒子大小的最小值、减少远场模式非常关键. 各层盒子大小可在建立几何信息树时获取, 但此时基函数往往没有填满盒子, 所得结果并不是最优的. 采用下面方案可求得盒子大小在各层的最小值: ①找到每一层中各盒子里所有边的中点坐标的最大值和最小值; ②由上面的坐标最大值和最小值计算

出每层盒子中相距最远的一对边的距离, 称为盒子的“边间距”; ③比较各层盒子的“边间距”, 得到各层盒子中最大的边间距, 这就是各层盒子尺寸的最小值. 不难分析, 上述寻找盒子最小尺寸的算法耗时  $N \log(N)$ , 其中  $N$  为未知数个数. 同时, 这个算法也很容易并行. 应用此远场模式减少技术可极大减少多层快速多极子的内存需求和计算时间而不影响计算精度. 对于 SHIP-536 算例, 本文优化技术将发射/接收模式矩阵、插值矩阵、转移矩阵和远场模式所消耗的内存由 18.4GB、3.4GB、1.4GB 和 9.7GB 减少到 8.4GB、2.4GB、1.2GB 和 5.0GB; 一次矩阵向量相乘的时间由 48.5s 减少为 33.7s. 而完成优化的开销, 即寻找各层盒子最小尺寸的时间, 仅为 10s.

### (4) 建立转移和插值操作的通信拓扑

转移和插值操作需要通信. 分布式内存并行平台上, 这种通信开销随目标电尺寸增大而急剧增加, 因此必须为转移和插值操作建立通信拓扑, 提高通信效率. 本文的通信拓扑由两类队列构成: 发送队列和接收队列, 分别保存要发送到不同处理器的远场模式(或盒子)的编号和要从其它处理器接收的远场模式(或盒子)的编号. 各处理器内使用的是局域编号, 但处理器间通信需要全局编号, 所以通信拓扑还需将全局编号转换为对应处理器上的局域编号. 这个功能由通信拓扑中的另外两个队列完成: 发送转换队列和接收转换队列. 发送数据只需局域信息, 所以发送队列可直接保存局域编号. 这样通信拓扑包含了三个队列: 发送队列、接收队列和接收转换队列.

针对转移操作的通信拓扑可由远相互作用队列建立, 针对插值操作的拓扑则由插值矩阵建立. 建立通信拓扑的时间和内存开销都非常小, 对于 SHIP-536 算例, 其内存消耗为 73.8MB, 时间为 2s.

### (5) 计算远相互作用

计算远相互作用时需要用到每个盒子的发射和接收模式. 不过当父盒子的发射模式配置到子盒子后, 就可释放父盒子发射模式的内存, 使得保存远场模式的内存需求减少近一半<sup>[11]</sup>. 串行环境下实现这种内存循环技术比较直接, 但分布式内存并行平台上, 存在处理器间数据同步的问题. 各处理器只有在收到同步信号后才能开始子盒子的计算, 以保证父盒子远场模式的操作已全部完成. 分布式内存并行系统提供了阻塞同步和非阻塞同步两种同步模式. 本文采用把通信和计算重叠的非阻塞通信模式. 2.4(4)建立的通信拓扑为非阻塞通信的实现提供了方便. 与阻塞模式相比, 因为需要编程检查通信是否成功, 非阻塞模式编程实现更加复杂.

### 3 高性能并行多层快速多极子的计算能力验证

根据图 1 所示框架,我们具体实现了多层快速多极子的并行方案.文中讨论的所有技术都集成到并行代码中.为了验证和展示并行算法的计算能力,我们在中国科学院“深腾 7000”高性能计算平台上计算了两个特大目标的电磁散射.

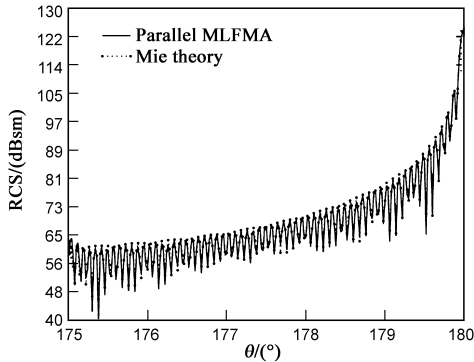


图3 直径为750波长的金属球的散射

#### 3.1 直径为 750 个波长的金属球

我们首先计算了需要 315,925,932 个未知数模拟的直径为 750 个波长的金属球(S-750)的散射.计算中把计算区域分成了 13 层(从 0 到 12 层),过渡层是第 6 层.图 3 给出了双站雷达散射截面(RCS)的计算结果.雷达散射截面在观察角度较大时变化非常剧烈,很难计算准确,清晰起见,图中只给出这部分计算结果.与 Mie 理论值相比,并行计算结果的均方根误差为 0.6dBsm.表 1 列出了计算中使用的资源.目前国际上公开报道能够计算超过一亿未知数目标的还有土耳其 Bilkent University 的电磁计算研究中心,表 1 中的 S-420 是他们目前能够计算的未知数最多的目标<sup>[12]</sup>.表 2 给出了计算中资源使用的详细情况.计算中迭代精度为 0.001,联合积分方程的联合系数为 0.5.

表 1 并行多层快速多极子使用的计算资源

	S-420	S-750	A-2000
几何尺寸(波长)	420	750	2000
未知数个数(亿)	2.04	3.16	2.89
处理器个数	64	64	64
计算区域的层数	12	13	14
内存总计(GB)	—	853	814
时间总计(分)	680	487	281
均方根误差(dBsm)	—	0.6	—

#### 3.2 尺寸达到 2000 个波长的飞机模型

为进一步验证高性能并行多层快速多极子的计算能力,我们计算了机身尺寸达到 2000 个电波长,需 289,344,192 个未知数来模拟的飞机模型(A-2000)的散射.设置垂直极化的入射波方向为(90°,0°),计算 XZ 平面内从 0 到 360 度范围的双站雷达散射截面.计算中把

计算区域分成了 14 层,过渡层为第 7 层.图 4 给出了仿真结果.表 1 和表 2 列出此次计算使用的资源.计算中迭代精度为 0.005,联合积分方程的联合系数为 0.5.

表 2 并行多层快速多极子使用计算资源的详细列表

	内存消耗/GB	
	S-750	A-2000
几何信息	94.5	53.1
近相互作用矩阵	157.5	190.2
发射/接收模式矩阵	144.1	150.3
转移矩阵	43.6	45.5
近/远相互作用队列	20.0	11.6
通信拓扑	2.0	1.1
远场模式	300.7	262.1
GMRES 求解	67.7	62.3
预处理器	14.8	19.4

	CPU 时间/s	
	S-750	A-2000
几何信息	2306	905
减少远场模式	38	40
近相互作用矩阵	2327	3575
远相互作用矩阵	722	625
一次矩阵向量相乘	241	176
计算雷达散射截面	60	50

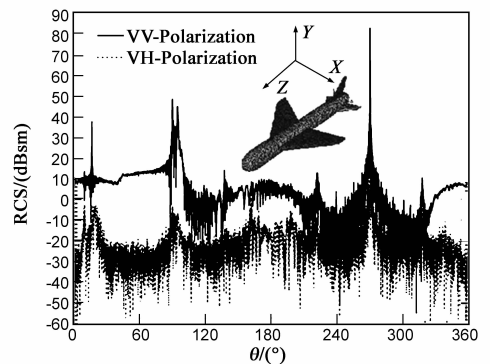


图4 尺寸达2000波长的飞机模型的散射

### 4 结论

针对分布式内存并行计算机架构以及电特大目标的特点,提出并实现了一种高性能并行多层快速多极子算法.为清晰表述算法、具体研究算法性能,提出并使用了一种由粗而细的分层渐进展开表述方式,阐述了本文的高性能并行多层快速多极子算法,并配以算例,深入分析了算法中各个环节的并行方案设计,充分研究、展示了算法的效率和精度.成功计算了两个电特大目标的散射:直径 750 个电波长、超过 3 亿 1000 万未知数模拟的金属球,以及尺寸达到 2000 个电波长、超过 2 亿 8000 万未知数模拟的飞机模型,证实了算法的效率和精度.

#### 参考文献:

- [1] Youssef N N. Radar cross section of complex targets[J]. Proceedings of the IEEE, 1989, 77(5): 722 - 732.

- [2] Rius J M, Ferrando M, Jofre L. High-frequency RCS of complex radar targets in real-time[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1993, 41(9): 1308 – 1319.
- [3] Andersh D J, Hazlett M, Lee S W, Reeves D D, Sullivan D P, Chu Y. XPATCH: A high-frequency electromagneticscattering prediction code and environment for complex three dimensional objects[J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1994, 36(1): 65 – 69.
- [4] Song J M, Lu C C, Chew W C. MLFMA for electromagnetic scattering by large complex objects[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1997, 45(10): 1488 – 1493.
- [5] 聂在平, 胡俊, 等. 用于复杂目标三维矢量散射分析的快速多极子方法[J]. 电子学报, 1999, 27(6): 104 – 109.  
Nei Zaiping, Hu Jun, et al. The fast multipole methods for vector analysis of scattering from 3-dimensions objects with complex structure[J]. Acta Electronica Sinica, 1999, 27(6): 104 – 109. (in Chinese)
- [6] Chew W C, Jin J M, Michielssen E, Song J M. Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics [M]. Boston, MA: Artech House, 2001. 132 – 135.
- [7] Pascal H A. Parallel implementation of the fast multipole method for Maxwell's equations[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2003, (43): 839 – 864.
- [8] 卢光辉, 孙世新, 等. 并行处理技术在电大尺寸复杂目标电磁散射中的应用[J]. 电子学报, 2003, 32(6): 882 – 885.  
Lu Guanghui, Sun Shixin, et al. Application of the parallel processing technology to electromagnetic scattering from electrically large complex objects[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 32(6): 882 – 885. (in Chinese)
- [9] 潘小敏, 盛新庆. 一种多层快速多极子的高效并行方案[J]. 电子学报, 2007, 35(3): 88 – 93.
- Pan Xiaomin, Sheng Xinqing. A highly efficient parallel approach of multi-level fast multipole algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(3): 88 – 93. (in Chinese)
- [10] Velamparambil S, Chew W C. Analysis and performance of a distributed memory multilevel fast multipole algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2005, 53(8): 2719 – 2727.
- [11] Velamparambil S, Chew W C, Song J. 10 million unknowns: is it that big? [J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 2003, 45(2): 43 – 58.
- [12] Ergul O, Gurel L. A hierarchical partitioning strategy for an efficient parallelization of the multilevel fast multipole algorithm[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(6): 1740 – 1750.
- [13] 潘小敏, 盛新庆. 电特大复杂目标电磁特性的高效精确并行计算[J]. 电波科学学报, 2008, 23(5): 888 – 893.  
Pan Xiaomin, Sheng Xinqing. Efficient and accurate parallel computation of electromagnetic scattering by extremely large targets[J]. Chinese Journal of Radio Science, 2008, 23(5): 888 – 893. (in Chinese)

#### 作者简介:

**潘小敏** 男, 1978 年 7 月出生, 博士、副研究员, 现于北京理工大学任教。目前在各类期刊杂志发表论文 20 余篇。研究方向包括电磁计算快速算法、高性能计算与并行技术、电磁兼容等。

E-mail: xmpan@bit.edu.cn

**盛新庆** 男, 2001 年度中国科学院“百人计划”入选者, 2004 年度教育部长江学者特聘教授, 现任北京理工大学信息与电子学院电子工程系教授、博士生导师。主要从事计算电磁学、电磁预测理论与技术、微波成像及遥感、天线理论及设计等方面的研究。

E-mail: xsheng@bit.edu.cn